Tentamen Variatierekening en Optimale Besturingstheorie

Datum	:	31-01-2012
Plaats	:	5116.0116
Tijd	:	14.00-17.00

Het tentamen is open boek; u kunt al uw boeken en aantekeningen gebruiken. U dient al uw antwoorden te motiveren en duidelijk aan te geven welke stellingen u eventueel gebruikt.

1. (a) Beschouw het variatierekeningprobleem bestaande uit het minimaliseren van

$$\int_0^T F(t, x(t), \dot{x}(t))dt$$

over alle functies $x : [0, T] \to \mathbb{R}$ (dus geen begin- of eindvoorwaarden).
Laat zien dat een minimaliserende functie $x^* : [0, T] \to \mathbb{R}$ voldoet aan

$$\frac{\partial F}{\partial x}(t, x(t), \dot{x}(t)) - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(t, x(t), \dot{x}(t))\right) = 0, \quad t \in [0, T],$$

en

$$\frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(0, x(0), \dot{x}(0)) = \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}(T, x(T), \dot{x}(T)) = 0$$

(b) Bereken de functie $x^* : [0, 1] \to \mathbb{R}$ die

$$\int_0^1 \left[\frac{1}{2}\dot{x}^2(t) + x(t)\dot{x}(t) + \dot{x}(t) + x(t)\right] dt$$

minimaliseert.

2. Beschouw het lineaire systeem $\dot{x} = Ax + Bu$, $x(0) = x_0$, met het kostencriterium

$$J(x_0, u) = \int_0^T e^{2\alpha t}[x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)]dt$$

voor een zekere constante $\alpha \leq 0$. Hierbij is $Q \geq 0$ en $R > 0$.

(a) Bepaal de Bellman-vergelijking voor dit optimale besturingsprobleem.

(b) Probeer $W(x, t) = e^{2\alpha t}x^T P_\alpha(t)x$, met $P_\alpha(t)$ een nader te bepalen symmetrische matrix, als oplossing van de Bellmanvergelijking. Laat zien dat deze W inderdaad een oplossing is als de matrix $P_\alpha(t)$ voldoet aan

$$\dot{P}_\alpha(t) = -P_\alpha(t)A_\alpha - A_\alpha^T P_\alpha(t) + P_\alpha(t)BR^{-1}B^T P_\alpha(t) - Q, \quad P_\alpha(T) = 0$$

voor $A_\alpha = A + \alpha I$.

(c) Laat zien dat de optimale ingangsfunctie $u^*(\cdot)$ gegeven wordt door

$$u^*(t) = -R^{-1}B^T P_\alpha(t)x(t)$$

(d) Pas de volgende tijdsafhankelijke transformatie toe:

$$z = e^{\alpha t}x, \quad v = e^{\alpha t}u$$

en herschrijf het kostencriterium J en de systeemvergelijkingen $\dot{x} = Ax + Bu$ in deze nieuwe variabelen. Laat zien hoe ook op deze wijze het resultaat van onderdeel (c) wordt verkregen.

(e) Bepaal met behulp van het bovenstaande een oplossing van het optimale besturingsprobleem waarin de volgende kostenfunctie

$$J(x_0, u) = \int_0^1 e^{-2t}[x^2(t) + u^2(t)]dt$$

dient te worden geminimaliseerd voor het scalaire systeem

$$\dot{x} = x + u, \quad x(0) = 1$$

3. De bewegingsvergelijkingen van een ideale slinger (met alle constanten gelijk aan 1) worden gegeven door

$$\ddot{\phi}(t) + \sin\phi(t) = u(t)$$

(a) Laat zien dat met de keuze van de toestandsvariabelen $x_1 = \phi$ en $x_2 = \dot{\phi}$ dit kan worden geschreven als het systeem

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -\sin x_1 + u \end{aligned}$$

Beschouw het optimale besturingsprobleem van het minimaliseren van

$$\frac{1}{2}\int_0^T [x_2^2(t) + u^2(t)]dt + \frac{1}{2}x_2^2(T) + (1 - \cos x_1(T))$$

(b) Bepaal de Hamiltoniaan voor dit optimale besturingsprobleem en schrijf de differentiaalvergelijkingen voor de co-toestand uit.

(c) Bepaal de Bellmanvergelijking voor dit optimale besturingsprobleem.

(d) Laat zien dat

$$V(x_1, x_2, t) = \frac{1}{2}x_2^2 + (1 - \cos x_1)$$

een oplossing is voor deze Bellmanvergelijking.

(e) Leid uit onderdeel (d) nogmaals de differentiaalvergelijking voor de co-toestand af.

(f) Laat zien dat de optimale ingangsfunctie $u^*(\cdot)$ in terugkoppelingsvorm gegeven wordt door

$$u^*(t) = -x_2(t)$$

Wat is van deze optimale terugkoppeling en van de waardefunctie de fysische interpretatie ?

4. Beschouw het volgende niet-lineaire systeem in $\mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x + u \\ \dot{y} &= -y - x^3 \end{aligned}$$

(a) Laat door linearisatie zien dat $(0,0)$ voor $u = 0$ een asymptotisch stabiel evenwichtspunt is.

(b) Bewijs dat de terugkoppeling $u = yx^2$ ervoor zorgt dat $(0,0)$ een *globaal* asymptotisch stabiel evenwichtspunt is voor het teruggekoppelde systeem. (Aanwijzing: construeer een Lyapunovfunctie.)

(c) Beschouw het gemodificeerde systeem

$$\begin{aligned} \dot{x} &= -x + u \\ \dot{y} &= -x^3 \end{aligned}$$

Laat zien dat $(0,0)$ voor $u = 0$ *geen* asymptotisch stabiel evenwichtspunt is.

Puntenverdeling: Gratis 10

1. a: 5, b: 10.

2. a: 5, b: 10, c: 5, d: 5, e: 5.

3. a: 5, b: 5, c: 5, d: 5, e: 5, f: 5.

4. a: 5, b: 5, c: 5.